

Intervalos de Confianza y Prueba de Hipótesis

La estadística inferencial es el proceso de usar la información de una muestra para describir el estado de una población. Sin embargo es frecuente que usemos la información de una muestra para probar una suposición o conjetura sobre la población. La suposición o conjetura se refiere a una hipótesis. El proceso que corrobora si la información de una muestra sostiene o refuta el reclamo se llama prueba de hipótesis.



Antes de iniciar estudiaremos lo relacionado a probar diferentes tipos de hipótesis, empezando por definir que es una *hipótesis* y una *prueba de hipótesis*, enlistaremos los pasos para probar una hipótesis, y realizaremos pruebas de hipótesis relativas a la media de una población y a las medias de dos poblaciones.

Aunque se pueden establecer pruebas de hipótesis para la proporción, para la varianza de una población o para dos poblaciones.



¿Qué es una hipótesis?

Hipótesis es una afirmación o suposición respecto al valor de un parámetro poblacional

Son ejemplos de hipótesis, o afirmaciones hechas sobre un parámetro poblacional las siguientes:

- El ingreso mensual promedio de los trabajadores de la Ciudad de Puebla es \$4500.00
- El rendimiento de una reacción es del 80%
- El 20% de los delincuentes capturados son sentenciados a prisión
- El consumo de gasolina promedio por auto es de 10 litros diarios

Todas estas hipótesis tienen algo en común, las poblaciones de interés son tan grandes que no es factible estudiar todos sus elementos. Como ya sabemos, una alternativa a estudiar la población entera es tomar una muestra de la población de interés. De esta manera podemos probar una afirmación para determinar si la evidencia soporta o no la afirmación.

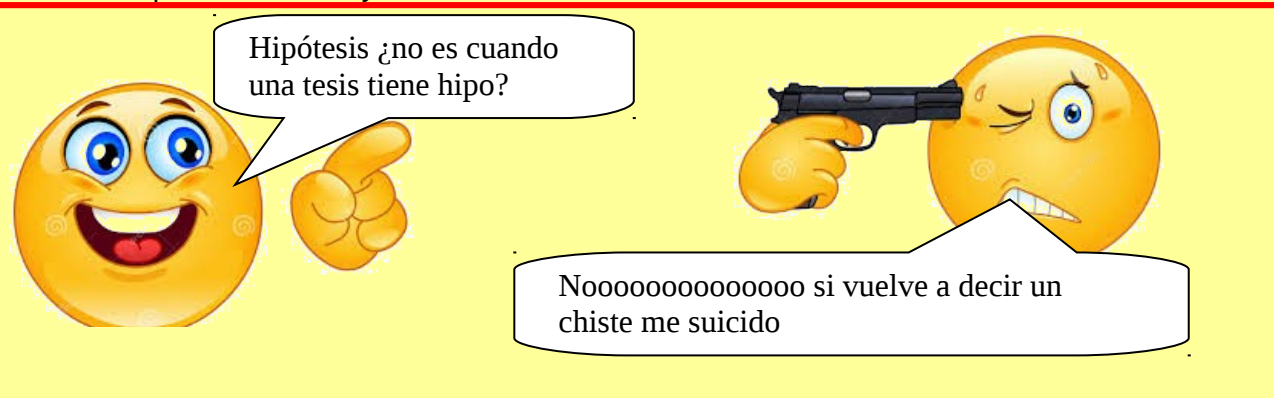
¿Qué es una prueba de hipótesis?

Una prueba de hipótesis comienza con una afirmación o suposición acerca de un parámetro poblacional, tal como la media poblacional. Una hipótesis podría ser que la matrícula que pagan los estudiantes de la Universidades privadas de Venezuela es en promedio de 3000 bolívares. Para comprobar esta hipótesis no podríamos contactar a todos los estudiantes universitarios de la república, el costo sería exorbitante. Para probar la validez de esta afirmación podríamos seleccionar una muestra de la población de estudiantes y basados en ciertas reglas de decisión, aceptar o rechazar la hipótesis. Si la media muestral fuera de 1000



bolívares ciertamente tendríamos que rechazar la hipótesis, pero si la media muestral fuera 2990 bolívares ¿podríamos asumir que la media poblacional si es de 3000 bolívares?, ¿podemos atribuir al error de muestreo la diferencia de 10 bolívares entre las dos medias, o es una diferencia significativa?

Prueba de hipótesis es un procedimiento basado en una evidencia muestral (es decir en el estudio de una muestra) y la teoría de la probabilidad. Este procedimiento se usa para determinar si la hipótesis es una afirmación razonable para no ser rechazada, o es una afirmación poco razonable y ser rechazada.



Procedimiento de 4 pasos para probar una hipótesis

Hay un procedimiento de cuatro pasos que sistematizan la prueba de hipótesis. Para ilustrar el procedimiento, completemos el ejemplo anterior. Supongamos que la muestra es de 20 estudiantes y el nivel de significancia es de .05. Los cuatro pasos son los siguientes:

Paso 1. Establecer las hipótesis nula y alternativa

El primer paso es establecer la hipótesis a ser probada. Esta es llamada la **hipótesis nula**, simbolizada por H_0 , el subíndice cero implica “cero diferencia”. Usualmente el término “no” es encontrado en la hipótesis nula significando “no cambio”. La hipótesis nula de la introducción podría ser “la colegiatura mensual promedio de los estudiantes universitarios no es diferente de 3000 bolívares”. Esto es lo mismo que decir “...es igual a 3000 bolívares”. La hipótesis nula se puede simbolizar $H_0: \mu = 3000$.

La hipótesis nula es una afirmación que será aceptada si los datos de la muestra no nos proveen de evidencia convincente de que es falsa, es decir, si se acepta la hipótesis nula decimos que la evidencia no es suficiente para rechazarla pero no podemos afirmar que es verdadera.

La hipótesis alterna es la afirmación que se acepta si se rechaza la hipótesis nula. Esta hipótesis, también llamada hipótesis de investigación, se simboliza con H_a . La hipótesis alterna es aceptada si la evidencia proporcionada por la muestra es suficiente para afirmar que la H_0 es falsa.

En este ejemplo las hipótesis serían las siguientes:

H_0 : La colegiatura promedio de los estudiantes no es diferente de 3000 bolívares

H_a : $\mu \neq 3000$

Realizado por: Lic. Pedro González Cordero

Ha: La colegiatura promedio de los estudiantes es diferente de 3000 bolívares

Ha: $\mu \neq 3000$

Paso 2. Determinar el criterio de decisión o de contraste

Determinar el criterio de decisión o de contraste consiste en especificar el nivel de significancia, el tipo de distribución, y los valores críticos.

Existen cuatro posibilidades al tomar una decisión respecto a una hipótesis:

	Aceptar H_0	Rechazar H_0
H_0 verdadera	Decisión correcta	Error Tipo I
H_0 falsa	Error Tipo II	Decisión correcta



Estudie los errores porque de ellos se aprende jejeje error de tipo I y II

Nivel de significancia es la probabilidad de rechazar una hipótesis nula verdadera

El **nivel de significancia** es simbolizado por α , y también es conocido como nivel de riesgo. Este último término es más apropiado porque es el riesgo que se toma de rechazar una hipótesis verdadera.

No hay un nivel de significancia para todos los estudios, se puede utilizar cualquier valor de probabilidad entre 0 y 1. Tradicionalmente, el nivel de .05 es aplicado a proyectos de investigación, el nivel .01 a control de calidad, y .10 a sondeos políticos. Tú como investigador debes decidir el nivel de significancia antes de coleccionar la muestra de datos.

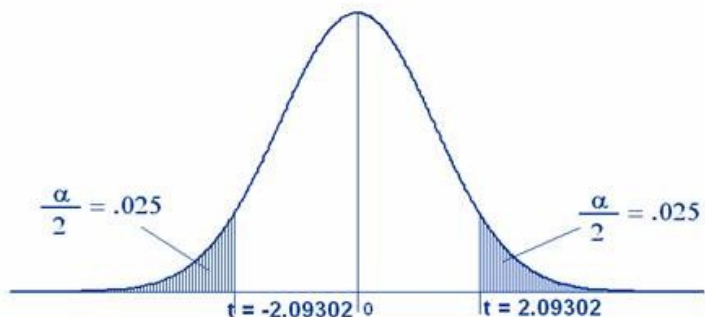
El **tipo de distribución** se determinará dependiendo de la naturaleza de la hipótesis y del tamaño de la muestra. Cuando la hipótesis es relativa a medias poblacionales o proporciones y las muestras son grandes ($n > 30$) se utiliza la distribución normal. Cuando es relativa a la media y la muestra es pequeña ($n \leq 30$) se utiliza la distribución t de student.

Cuando se trata de hipótesis sobre la varianza se usa la distribución Chi² y cuando se trata de hipótesis entre varianzas de dos poblaciones se usa la distribución F.

Los **valores críticos se determinan con el nivel de significancia y la distribución correspondiente**. Estos son los valores de la variable de la distribución que limitan el área crítica, que es la parte de la curva que corresponde al nivel de significancia.

En este ejemplo de la colegiatura el nivel de significancia es de .05, se utiliza la distribución t de student porque la muestra es pequeña, los valores críticos se encontraron de la siguiente manera

El área crítica cuando la hipótesis alterna tiene el símbolo (\neq) se divide en dos y se dice que el problema es de dos colas, y cada cola vale $\alpha/2$. Si la H_a tiene el signo ($<$) el problema es de la cola izquierda, si tiene el signo ($>$) es de la cola derecha, y en ambos casos la cola vale α . Este problema es de dos colas:



$\alpha/2$.025
ϕ	
19	2.09302

Simple es 0,05 pues la mitad de esto en cada cola 0,025

Paso 3 de prueba



El estadístico de prueba es un valor obtenido de la información de la muestra para compararlo con el criterio de contraste y rechazar o aceptar la hipótesis. El estadístico de prueba cambia de acuerdo a la distribución que se utilice. En este problema el estadístico de prueba es t y se simboliza t*



TIPIFICATEEEEE

$$t^* = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$$

Supongamos que en una muestra las colegiaturas de los estudiantes universitarios entrevistados son las siguientes:

2821	3102	2398	2511	3222
2329	3109	2725	3627	2933
3822	3044	3125	2650	2741
3054	3281	2292	2952	2462

La media y la desviación estándar de la muestra son 2910 y 411.95 respectivamente, se procede enseguida a calcular el error estándar y la t*

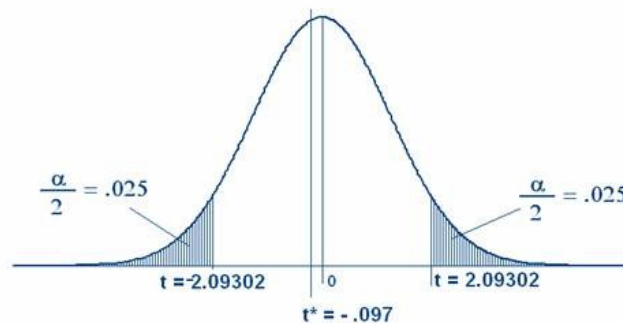
Realizado por: Lic. Pedro González Cordero

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{411.95}{\sqrt{20}} = 92.11$$

$$t^* = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{2910 - 3000}{92.11} = -.097$$

Paso 4. Tomar decisión y conclusión

Una regla de decisión es establecer las condiciones sobre las cuales la hipótesis nula es rechazada o no rechazada. Si el estadístico de prueba queda dentro de la zona crítica la hipótesis nula deberá ser rechazada. Si el estadístico de prueba queda fuera de la zona crítica la hipótesis nula no deberá ser rechazada.



En el ejemplo de las colegiaturas, como el estadístico de prueba quedó fuera de la zona crítica la hipótesis nula no puede ser rechazada. La conclusión podría ser la siguiente:

“No hay evidencia suficiente para afirmar que la colegiatura que pagan en promedio los estudiantes universitarios es diferente de 3000 bolívares, en un nivel de significancia de .05”

Sin embargo en la clase se presentó otra forma de tomar la conclusión usando el valor p o p value. En este ejemplo se trata de una hipótesis bilateral y el valor de referencia es alfa = 0.05. A partir del resultado del estadístico de prueba $t = -0.097$ (menos cero punto noventa y siete) se obtiene en R el p value correspondiente con la instrucción `pt(-0.097,19)` de donde resulta un p value de 0.4618711 (observe que esta es un área bajo la curva hacia la derecha)

Dado que el valor p es mayor que el valor de referencia, entonces se dice que no existe evidencia para rechazar la Hipótesis nula. Es decir que

“No hay evidencia suficiente para afirmar que la colegiatura que pagan en promedio los estudiantes universitarios es diferente de 3000 bolívares, en un nivel de significancia de .05”



Realizado por: Lic. Pedro González Cordero

Prueba de hipótesis relativas a dos medias

El siguiente ejemplo nos muestra el procedimiento de prueba de hipótesis relativas a la media de dos poblaciones.

Ejemplo

Se realizó un estudio con un nivel de significancia de **.05** para investigar si el número de u.e.á's que se dan de baja en la quinta semana es diferente entre los estudiantes de ingeniería de la Universidad Católica Andrés Bello UCAB y los estudiantes de ingeniería de la Universidad Metropolitana UNIMET. Se obtuvieron **dos** muestras representativas de **40** estudiantes. La muestra 1 (UCAB) tuvo un puntaje medio de **3.5** (es decir dan de baja en promedio 3.5 u.e.á's) con una desviación estándar de **2**, mientras que la muestra 2 (UNIMET) tuvo una media de **3** con una desviación de **2.2**.

1.- Establecer las hipótesis

Ho: $\mu_1 \leq \mu_2$

Ho: « El número de u.e.aás que dan de baja no es mayor en la UCAB que en la UNIMET »

Ha: $\mu_1 > \mu_2$

Ha: « El número de u.e.á's que dan de baja en UCAB es mayor que en la UNIMET ».

2.- Establecer el criterio de decisión o contraste

Como en este problema, la hipótesis **alternativa** o alterna contiene el signo (>) el problema es de **una cola**, es decir, la región crítica se ubica en el extremo derecho de la curva. Para determinar que tipo de distribución se utilizará primero deberíamos estudiar si la muestra es pequeña o grande, vamos a suponer que 30 es el límite:

□ Si $n_1 + n_2 - 2 > 30$ entonces se busca en la tabla el valor de **z** correspondiente a $\alpha/2$.

□ Si $n_1 + n_2 - 2 \leq 30$ se busca en la tabla el valor **t** correspondiente a $\Phi = n_1+n_2-2$ y a $\alpha/2$.

En este ejemplo, $\Phi = n_1 + n_2 - 2 = 40 + 40 - 2 = 78$ entonces $\Phi > 30$ y por lo tanto se utiliza la distribución normal con $\alpha = .05$

El valor .05 no está en la tabla, pero debería encontrarse entre estas dos cantidades

Z	4	?	5
1.6	.05050	.05	.04947

Se procede entonces con un procedimiento llamado interpolación, identificando la primera z como z1 y la segunda como z2. Las áreas como A1 y A2 respectivamente.

Realizado por: Lic. Pedro González Cordero

	Z1	Z	Z2
Z	4	?	5
1.6	.05050	.05	.04947
	A1	A	A2

Luego se aplica la fórmula de interpolación:

$$Z = Z_1 + (Z_2 - Z_1) \frac{(A_1 - A)}{(A_1 - A_2)} = 1.64 + (1.65 - 1.64) \frac{(.05050 - .05)}{(.05050 - .04947)} = 1.6448$$

Pero usted tiene suerte pues con R puede obtener el valor exacto con la instrucción `qnorm(0.05, lower.tail = F)` ide donde resulta 1.644854

3.- Calcular el valor del estadístico de prueba

En este ejemplo vamos a suponer que las varianzas de las dos poblaciones son iguales (aunque en el examen usted deberá probar si esta hipótesis es plausible o válida).

Entonces si esta hipótesis de igualdad de varianzas es válida, se calcula el error estándar de la diferencia de las medias

$$\sigma_{\text{dif}} = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{\phi} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

$$\sigma_{\text{dif}} = \sqrt{\frac{(39)(2)^2 + (39)(2.2)^2}{78} \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} \right)}$$

$$\sigma_{\text{dif}} = .47$$

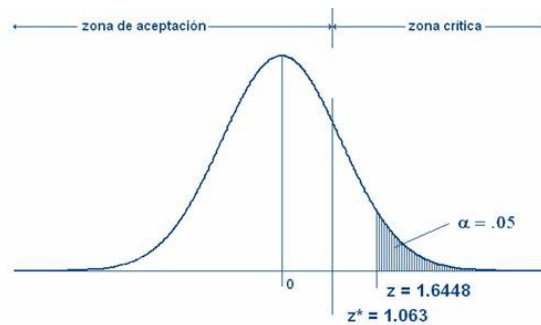
Se calcula el valor del estadístico de prueba, en este caso Z^*

$$Z^* = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma_{\text{dif}}} = \frac{3.5 - 3}{.47} = 1.063$$

Usted tiene las formulas que quizás no corresponden a la anterior, pero puede verificar si dan resultados semejantes o no

4.- Tomar una decisión e interpretar

Realizado por: Lic. Pedro González Cordero



El estadístico de prueba queda localizado fuera de la zona crítica, entonces no podemos rechazar la hipótesis nula (H_0), de tal suerte que se concluye lo siguiente:

No hay evidencia suficiente, con un nivel de significancia de .05, de que la prensa popular tenga una mayor orientación al tema sexual que la prensa de clase media

Pero pues a nosotros nos interesa aprender a tomar una decisión mediante el valor p o p value.

```
> pnorm(1.063, lower.tail = F)
```

```
[1] 0.1438910
```

Es decir el p value = 0.1438, como es de una cola se compara con 0.05 y como 0.1438n entonces ***No hay evidencia suficiente, con un nivel de significancia de .05, de que los estudiantes de la UCAB den de baj más u.e.aás que los estudiantes de la UNIMET***

Problemas

1.- Una compañía de transportes desconfía de la afirmación de que la vida útil de ciertos neumáticos es al menos 28,000 km. Para verificar la afirmación se prueba una muestra de estas llantas en los camiones de la compañía, obteniéndose los siguientes resultados en miles de kilómetros:

25.6	27.1	31.1	26.5	26.5	28.3	29.4
27.4	29.7	29.5	27.7	27.1	31.2	29.5
27.3	25.8	26.5	27.3	31.2	28.0	26.0
29.6	26.4	26.4	25.8	27.5	27.9	26.9
23.4	28.0	29.0	28.8	27.3	27.5	27.8

a) ¿Es correcta la sospecha de la compañía de transportes en base a estos datos y a un nivel de significancia de .01 ?

b) ¿Cual sería la conclusión si el nivel de significancia fuera .05?

c) Se sospecha que la varianza poblacional es superior a 3,000 ¿es correcta esta sospecha a un nivel de significancia del 0.05 ?

Realizado por: Lic. Pedro González Cordero

d) Obtener el intervalo de confianza a un nivel del 95% para la varianza y el promedio de la vida útil a un nivel de significancia del 0.05.

e) Obtener el intervalo de confianza a un nivel del 95% para la proporción de neumáticos inferior a 28,000 km.

2.- usted realiza un experimento con dos grupos de estudiantes. A un grupo le aplica un examen y no les permite usar formulario y al segundo grupo le aplica el mismo examen y les deja usar formulario. Los tiempos que tardan en responder el examen son los siguientes:

Grupo 1						
52	72	73	64	48	52	57
46	66	61	46	65	62	47
51	53	49	47	73	61	53
60	62	43	46	75	64	68

Grupo 2						
42	58	35	51	51	47	35
61	31	32	47	60	29	35
28	14	64	37	65	60	48
37	43	45	58	18	39	41

a) ¿Existe evidencia de que las desviaciones estándar de los tiempos entre los dos grupos sean diferentes a un nivel de 0.05?

b) ¿Existe evidencia suficiente de que el promedio de tiempo que tardan los estudiantes en resolver el examen es diferente entre los dos grupos con un nivel de significancia de .05 ?

c) ¿Existe evidencia suficiente de que el tiempo que tardan los estudiantes del primer grupo es mayor que el tiempo que tardan los del segundo grupo, con un nivel de significancia de .05 ?

d) ¿obtener el intervalo de confianza a un nivel del 95% para la diferencia de los promedios o medias poblacionales de ambos grupos y para el radio de varianzas? Que relación observa con los resultados de los incisos anteriores.

3.- La compañía "X" que fabrica lámparas incandescentes, asegura que su producto es superior al de su principal competidor, la compañía "Y". En un estudio, en una muestra de 24 de las lámparas "X" y una muestra de 20 lámparas "Y" se obtuvieron las siguientes duraciones en horas:

Lámparas "X"					
643	636	630	645	630	624
667	626	635	652	622	629
624	662	633	645	691	690
636	656	610	645	621	630

Lámparas "Y"					
611	655	630	639	622	688
665	696	665	573	639	585
641	673	649	597	629	648
652	641				

a) En base a esta información, y usando el metodo de intervalos de confianza al 99%, ¿se debe aceptar la afirmación de la compañía "X"?

b) La compañía "Y" afirma que las lámparas "X" duran menos de 650 horas, si el nivel de significancia es .01, ¿se debe aceptar la afirmación de la compañía "Y"?

4.- En un laboratorio, se experimenta con dos drogas que reducen el tiempo de respuesta a cierto estímulo. Se administra a 30 ratas la droga 1 y a 35 la droga 2. La reducción del tiempo de reacción al estímulo de cada rata fue registrada como sigue:

Realizado por: Lic. Pedro González Cordero

Reducción del tiempo con la droga 1				
28	31	33	23	20
30	22	34	32	35
30	33	36	34	43
26	28	27	23	29
28	33	33	29	38
27	26	21	24	24

Reducción del tiempo con la droga 2				
11	21	7	21	23
23	24	27	23	30
17	17	16	16	25
37	29	22	12	26
27	15	23	29	19
16	17	33	36	14
27	15	28	19	27

a) Si el nivel de significancia es .05, y las desviaciones estándar poblacionales no se conocen (usted deberá establecer y probar las hipótesis para decidir si son o no iguales) ¿es posible decir que no existe diferencia entre la reducción del tiempo de respuesta con la droga 1 que con la droga 2?

b) Si el nivel de significancia es .05, ¿es posible decir que es mayor la reducción del tiempo de respuesta de las ratas del grupo 1 que la de las del grupo 2?

c) Si el nivel de significancia es .05, y la desviación estándar de ambas muestras es 10 msec, ¿es posible decir que no existe diferencia entre el tiempo de respuesta con la droga 1 y el tiempo de respuesta con la droga 2?

c) Si el nivel de significancia es .05, y la desviación estándar poblacionales se desconocen y se supone son diferentes, ¿es posible decir que no existe diferencia entre el tiempo de respuesta con la droga 1 y el tiempo de respuesta con la droga 2?

5.- La concentración promedio de albúmina (un tipo de proteína) en el suero de una población de individuos es de 4.1 g/100 ml. A una muestra aleatoria de 25 individuos de esta población se les aplicó una dosis diaria de esteroide "A" y a otra muestra de 20 individuos se les aplicó el esteroide "B", las concentraciones de albúmina de ambas muestras son las siguientes:

Concentraciones de albúmina con Esteroide "A" (g/100ml)				
4.1	3.7	4.1	4.0	4.3
3.7	4.4	3.8	3.5	3.4
4.0	4.3	4.5	4.0	3.5
4.3	3.4	3.3	4.3	2.9
3.8	3.8	4.1	4.4	4.1

Concentraciones de albúmina con Esteroide "B" (g/100ml)				
4.0	3.9	3.8	3.7	3.7
3.5	3.6	3.6	3.5	3.8
3.5	3.8	4.0	3.4	3.9
3.5	3.5	4.0	3.4	3.9

a) Si el nivel de significancia es .05, ¿podemos decir que en base a estos datos, que el esteroide "A" disminuye el nivel de albúmina en el suero?

b) Si el nivel de significancia es .01, ¿podemos decir que en base a estos datos, que el esteroide "A" disminuye el nivel de albúmina en el suero?

c) Si el nivel de significancia es .005, ¿podemos decir que en base a estos datos, que el esteroide "A" disminuye el nivel de albúmina en el suero igual que el esteroide "B"?

d) Si su hubiese tratado de los mismos pacientes podríamos suponer que se trata de un experimento apareado que concluye para la pregunta a.